

Misura del meridiano terrestre con il metodo di Eratostene

Misura effettuata il 29 marzo 2001

Scuole Gemellate:

Liceo Scientifico “A. Volta” – Reggio Calabria

Liceo Scientifico “L. da Vinci” – Bisceglie (BA)

Introduzione

Una classe seconda del Liceo Scientifico “A. Volta” di Reggio Calabria assieme alla classe 3B del Liceo Scientifico “L. da Vinci” di Bisceglie (BA) hanno effettuato l’esperienza della misura del meridiano terrestre utilizzando il metodo ideato da Eratostene e rivisitato secondo le indicazioni fornite nell’ambito dell’iniziativa “Rete di Eratostene” attraverso il sito di riferimento <http://www.vialattea.net/eratostene> ; in particolare le misure dell’inclinazione dei raggi solari sono state effettuate con la **tecnica del foro gnomonico**.

Le due scuole gemellate hanno coordinate:

- ✓ Liceo Scientifico “A. Volta” di Reggio Calabria
38° 06’ 29’’ lat. Nord 15° 38’ 50’’ long. Est
- ✓ Liceo Scientifico “L. da Vinci” di Bisceglie (BA)
41° 14’ 26’’ lat. Nord 16° 30’ 07’’ long. Est

Materiali e strumenti di misura

Fogli di compensato, aste di legno, seghetti, vinavil, taglierino (per la costruzione dello gnomone), superficie piana (dei banchi) , squadrette, gomme, matite, Atlante Automobilistico, livella ad acqua, metro.



*Alcuni gnomoni del
L.S. di Bisceglie*

Procedimento

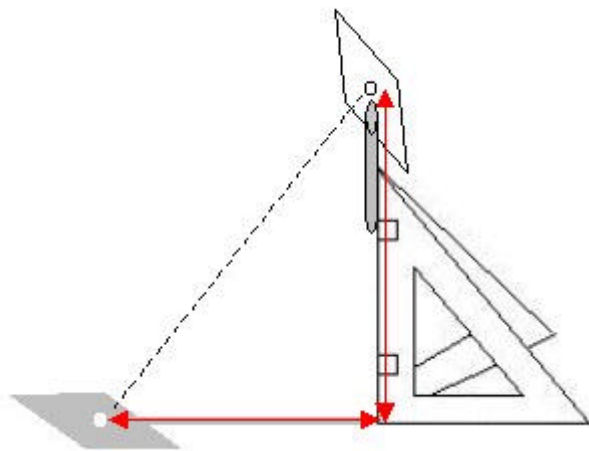
- ✓ Luogo di misurazione: qualsiasi spazio all’aperto e soleggiato
- ✓ Si fa in modo che il foro gnomonico risulti il più possibile circolare.
- ✓ Con la livella si verifica lo stazionamento della superficie di appoggio dello gnomone in modo tale da risultare orizzontale.

- ✓ Sempre con la livella si verifica l'ortogonalità tra la superficie d'appoggio e le squadrette utilizzate come supporto dello gnomone.
- ✓ Usando il modulo di calcolo disponibile sul sito web di riferimento si determina il momento nel quale il Sole culmina sul meridiano locale. Ad intervalli di tempo regolari, intorno all'istante di culminazione, si determina il centro del foro gnomonico secondo la tecnica concordata e qui di seguito schematizzata.

Misurazione dell'ombra

Nel giorno prestabilito e nel momento della culminazione del Sole, dopo che ogni postazione ha predisposto gli strumenti adatti, si misura la lunghezza dell'ombra **segnando due punti** sul foglio:

- 1) la base dello gnomone
- 2) il centro del puntino luminoso proiettato dal foro gnomonico. La distanza tra questi due punti corrisponde alla **lunghezza dell'ombra**.



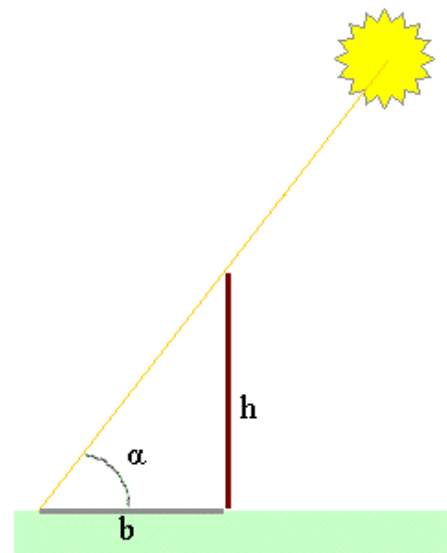
Le misure che ci servono per poter determinare l'inclinazione dei raggi solari sono:

1-lunghezza dello gnomone (cioè l'altezza del centro del foro gnomonico rispetto alla base di appoggio)

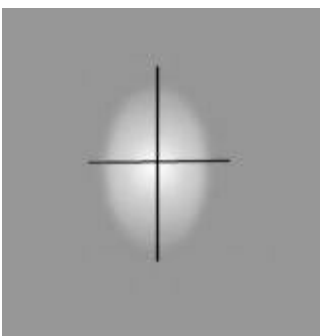
2-lunghezza dell'ombra proiettata dallo gnomone (cioè la distanza tra la base dello gnomone e il centro del punto di luce proiettato sulla carta)

Entrambe le misure devono essere **esprese in millimetri**.

L'inclinazione dei raggi solari col **metodo trigonometrico** che consiste nel **calcolare l'arcotangente** del rapporto tra l'altezza dello gnomone **h** e la lunghezza dell'ombra **b**



Uso del foro gnomonico



Il fascio di raggi solari che attraversano il foro gnomonico si proietta sul foglio di carta orizzontale, formando un punto di luce, o meglio, un'**ellisse luminosa** le cui dimensioni e la cui forma variano in funzione di molti fattori (altezza dello gnomone, dimensioni del foro, inclinazione dei raggi solari).

Determinare il **centro dell'ellisse** non è una cosa facilissima: deve essere un'operazione abbastanza rapida per non perdere il momento della culminazione del Sole e nello stesso tempo, sufficientemente precisa. E' possibile identificare "a occhio" questo punto, dato che la forma simmetrica stessa dell'ellisse aiuta a

determinarlo. Piuttosto di segnare il punto centrale, conviene tracciare a mano libera una croce formata dai due assi. L'incrocio degli assi identifica il centro; la croce lasciata sul foglio è più facilmente individuabile rispetto ad un puntolino.

Determinazione della distanza in linea d'aria tra le due scuole

Per fare questo, si utilizza una carta geografica dell'Italia e un righello e si procede nel seguente modo:

- 1) si misura la distanza in millimetri tra le due località
- 2) si moltiplica tale misura per il fattore di scala e quindi si esegue l'equivalenza in km.

Misure effettuate

Le misure sono state prese da tre postazioni di cinque allievi ciascuna per Reggio Calabria e due per il Liceo di Bisceglie.

Di seguito si riportano i dati ottenuti per il **29 marzo 2001 nello stesso giorno e nello stesso istante a mezzodì dalle due città:**

Reggio Calabria n. 03 postazioni

Altezza Gnomone (mm)	Lunghezza Ombra (mm)	Altezza del Sole (°)	Valore Medio Altezza Sole (°)
335 ± 1	225 ± 1	56.0 ± 0.2	55.00 ± 0.25
323 ± 1	223 ± 1	54.5 ± 0.2	
315 ± 1	219 ± 1	54.5 ± 0.3	
313 ± 1	219 ± 1	55.0 ± 0.3	53.90 ± 0.25
265 ± 1	150 ± 1	53.30 ± 0.25	
200 ± 1	150 ± 1	53.5 ± 0.2	
327 ± 1	221 ± 1	56.0 ± 0.2	56.10 ± 0.25
332 ± 1	223 ± 1	56.50 ± 0.25	
335 ± 1	224 ± 1	55.80 ± 0.25	

Quindi il valore medio dell'altezza del sole a Reggio Calabria è 55.00 ± 0.25 .

Bisceglie (BA) n. 02 postazioni

Altezza Gnomone (mm)	Lunghezza Ombra (mm)	Altezza del Sole (°)	Valore Medio Altezza Sole (°)
735	573	52.06	51.84 ± 0.19
735	578	51.81	
735	572	52.10	
170	134	51.75	
170	135	51.55	
170	134	51.75	

In entrambi i valori dell'altezza del Sole l'errore assoluto associato alla media aritmetica è stato calcolato come scarto quadratico medio rispetto alla media (o deviazione standard).

Analisi dei risultati

Per risalire alla misura del meridiano terrestre si procede come segue:

1) si calcola della differenza delle altezze del Sole **Da** tra Reggio Calabria e Bisceglie (BA):

$$\Delta\alpha = 55.00^\circ - 51.84^\circ = 3.16^\circ$$

2) si misura la distanza in linea d'aria tra le due città gemellate; in questo caso si ottiene

$$d = (352.5 \pm 1.5) \text{ km}$$

3) si calcola la lunghezza L del meridiano terrestre sfruttando la seguente proporzione:

$$Da : 360^\circ = d : L$$

da cui si ottiene

$$L = 352.5 \text{ km} * 360^\circ / 3.16^\circ \cong 40158 \text{ Km}$$

Calcolo dell'errore

Ricordando che nel caso di quoziente tra misure l'errore relativo è dato dalla somma degli errori relativi si deduce che l'errore relativo su L è

$$\delta L / L = (\delta d)/d + \delta(\Delta\alpha)/ \Delta\alpha$$

e perciò l'errore assoluto si calcola come

$$\delta L = [(\delta d)/d + \delta(\Delta\alpha)/ \Delta\alpha] * L$$

Per il calcolo dell'errore $\delta(\Delta\alpha)$ va considerato che $\Delta\alpha$ è una misura indiretta e pertanto si deve utilizzare la legge della propagazione degli errori (*) che, nella sua formulazione semplificata, prevede che nel caso di somma o differenza di misure gli errori assoluti si sommino; pertanto in tal caso si ottiene:

$$\delta(\Delta\alpha) = 0.25^\circ + 0.19^\circ = 0.44^\circ$$

In realtà il valore così calcolato costituisce il limite massimo per l'errore $\delta(\Delta\alpha)$ poiché un'analisi matematica più sofisticata (che fa uso delle derivate parziali) permette di dimostrare che nel caso di misure indipendenti l'errore sulla somma o differenza tra due grandezze x e y si può calcolare come

$$d(x \pm y) = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

e in tal caso si ottiene:

$$\delta(\Delta\alpha) = 0.31^\circ$$

Si può poi facilmente verificare che l'errore relativo sulla misura della distanza **d** tra le due città è trascurabile rispetto a quello su $\Delta\alpha$.

Da quanto detto segue che **la nostra migliore stima** del meridiano terrestre è quella che fornisce :

$$\delta L = [\delta(\Delta\alpha)/ \Delta\alpha] * L = [0.31^\circ / 3.16^\circ] * 40158 \text{ Km} = 3940 \text{ Km}$$

da cui:

$$L = (40158 \pm 3940) \text{ km}$$

con un'incertezza percentuale del $[3940 / 40158] * 100 = 9.8 \%$

Comunque la nostra stima del meridiano terrestre è affetta **al più** da un errore

$$\delta L = [\delta(\Delta\alpha)/ \Delta\alpha] * L = [0.44^\circ / 3.16^\circ] * 40158 \text{ Km} = 5592 \text{ Km}$$

da cui:

$$L = (40158 \pm 5592) \text{ km}$$

con un'incertezza percentuale del $[5592 / 40158] * 100 = 13.9 \%$

*In entrambi i casi il valore misurato risulta compatibile col valore atteso di 40030 Km poiché questo cade all'interno dell'intervallo di variabilità ottenuto.

Alcune considerazioni

Dal punto di vista operativo una delle principali difficoltà incontrate, per lo meno nel caso delle misure effettuate a Bisceglie, è stata assicurare alla strumentazione il livellamento e l'ortogonalità richiesti; infatti un'accurata analisi degli apparati sperimentali ha evidenziato che tra le cinque postazioni predisposte solamente due erano in grado di assicurarli.

* John R. Taylor, "Introduzione all'analisi degli errori", ed. Zanichelli
Perkins, "Introduction to quantum theory and Gaussian discrepancy", ed. Addison and Westey